com a l'oest de Greenwich. Quan l'ombra passa per un d'aquests senyals, llavors el sol passa sobre la Terra pel meridià corresponent. Dit d'una altra manera, en aquell moment el segment rectilini que uneix el centre del Sol amb el centre de la Terra talla aquell meridià. Per exemple, quan l'ombra del pal passa pel senyal del marc corresponent a 15 graus est, en aquell moment són les 11 hores solars vertaderes del meridià de Greenwich. Així, doncs, l'artefacte té també la funció de rellotge de sol tradicional, perquè indica l'hora de temps solar vertader de Greenwich.

Joan Girbau
UAB

Premis

Societat Catalana de Matemàtiques

Convocatòries del 2011

La Societat Catalana de Matemàtiques ha convocat enguany una edició més, dins el cartell de premis de l'IEC, del premi

Premi Évariste Galois

Instituït l'any 1962 i convocat per quaranta-vuitena vegada, s'ofereix a un treball d'investigació, bibliogràfic o d'assaig sobre matemàtiques. Està dotat amb mil euros (1.000 €).
Termini per a la presentació de candidatures: 3 de desembre de 2010 a les 13 h.

Més informació: http://scm.iec.cat

Guardonats en la convocatòria del 2010

• El Premi Josep Teixidor de Matemàtiques ha estat atorgat a Elisenda Feliu i Trijueque pel treball *Sobre la teoria d'intersecció aritmètica superior*.

• El Premi Évariste Galois ha estat atorgat a Joan Bosa Puigredon pel treball *Complecions de semigrups. Aplicacions al semigrup de Cuntz*. El jurat va concedir dos accèssits a David Arazo Marin pel treball *No anul·lació de funcions L en valors crítics i resultats d'equidistribució en aritmètica* i a Víctor González Alonso pel treball *Gèrmens polars i invariants de singularitats*.

Aquests premis foren lliurats el passat 22 d'abril en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudis de l'Institut d'Estudis Catalans.

Ressenyes d'obres guardonades

• Elisenda Feliu i Trijueque «Sobre la teoria d'intersecció aritmètica superior». Premi Josep Teixidor 2010

La geometria algebraica estudia les solucions d'un sistema d'equacions polinòmiques. L'objecte definit per un tal sistema es denomina *varietat algebraica*. Tot i que la definició concreta d'una varietat algebraica és molt sofisticada i pot variar amb el context, per simplificar l'exposició, suposarem que estem treballant en el cos dels nombres complexos i que una *varietat algebraica* és simplement el conjunt de punts d'un espai projectiu que són solució del sistema d'equacions.

En l'estudi de les varietats algebraiques tenen un paper important, d'una banda, les subvarietats algebraiques, subconjunts que s'obtenen imposant un sistema més ampli d'equacions, i de l'altra, els fibrats vectorials, objectes que es poden entendre com a espais de funcions generalitzades.

Donades dues subvarietats algebraiques, la seva intersecció és una nova subvarietat algebraica. Per poder donar una definició rigorosa d'un producte d'intersecció amb bones propietats, cal considerar cicles algebraics, és a dir, sumes formals de subvarietats algebraiques irreductibles. D'aquesta manera podem codificar multiplicitats d'interseccions. A més, perquè el producte d'intersecció estigui definit en tots els casos, convé introduir una relació d'equivalència per cicles algebraics, l'equivalència racional. Les classes d'equivalència racional de cicles algebraics formen el grup de Chow de la varietat.

De la mateixa manera, en estudiar certes propietats dels fibrats vectorials convé considerar-ne sumes formals i introduir-hi una relació d'equivalència, el que ens proporciona el grup de Grothendieck o grup K_0 de la varietat.

Aquests dos grups, el de Chow i el de Grothendieck, estan relacionats per les anomenades *classes característiques*. Aquestes classes són una generalització als fibrats vectorials de l'aplicació que assigna a tota funció racional el cicle algebraic donat pel lloc de zeros menys el lloc de pols de la funció.

Una bona part de la geometria algebraica consisteix precisament en l'estudi de la interrelació entre el grup de Chow i el grup de Grothendieck, les classes característiques i la teoria d'intersecció.

Recordem que el grup fonamental d'un espai topològic es pot generalitzar definint els grups d'homotopia de l'espai. També, el grup de seccions globals d'un fibrat vectorial es pot generalitzar amb els grups de cohomologia del fibrat. Moltes propietats i teoremes són més transparents i precisos quan s'apliquen a tots els grups d'homotopia o de cohomologia i no únicament al grup fonamental o al grup de seccions globals.

De la mateixa manera, els grups de Chow i de Grothendieck són la punta de l'iceberg d'una teoria més profunda. D'una banda, tenim els grups de Chow superiors definits per Bloch, que formen l'homologia motívica de la varietat. De l'altra, tenim els grups K superiors introduïts per Quillen. A partir d'aquests grups es pot construir la cohomologia motívica de la varietat, introduint les operacions d'Adams (endomorfismes dels grups de teoria K) i considerant els subespais propis per a aquests endomorfismes.

La geometria aritmètica estudia solucions de sistemes d'equacions polinòmiques a coeficients enters i les solucions enteres en són l'interès principal. Per exemple, un problema clàssic en geometria aritmètica és la determinació dels punts amb coordenades enteres continguts en una corba algebraica.

En teoria de nombres es coneix des de fa temps que moltes propietats aritmètiques estan codificades en objectes analítics. La teoria d'Arakelov busca interpretar aquest maridatge entre aritmètica i anàlisi amb un llenguatge geomètric.

Gillet i Soulé, generalitzant treballs d'Arakelov, Faltings i Deligne han desenvolupat tot el llenguatge del grup de Chow i del grup K_0 en teoria d'Arakelov, proporcionant una teoria d'intersecció aritmètica i una teoria de classes característiques.

Aquesta tesi s'emmarca dins d'un programa per desenvolupar els grups de Chow i els grups K superiors en teoria d'Arakelov. Conté tres resultats principals següents:

1. Un teorema d'unicitat per a operacions i classes característiques en teoria K superior.
2. Una nova definició de grups de Chow aritmètics superiors.

3. La introducció de les operacions d'Adams en teoria K aritmètica superior.

El primer resultat és un teorema d'unicitat de classes característiques i operacions en teoria K superior. Aquest teorema assegura que tota operació o classe característica en teoria K superior, que satisfà certes propietats, està completament determinada pel seu efecte en el grup K_0. Com a aplicació d'aquest teorema s'obtenen diversos teoremes de comparació entre diferents definicions de reguladors (un avatar de les classes característiques en teoria K superior) i entre diferents definicions d'operacions d'Adams en teoria K superior.

El segon resultat de la tesi és una nova definició dels grups de Chow aritmètics superiors. Per a varietats projectives sobre un cos, Goncharov va donar una definició de grups de Chow aritmètics superiors, però aquesta té diversos inconvenients. S'aplica únicament a les varietats projectives i no a les varietats quasiprojectives i no té definit un producte d'intersecció ni imatges inverses. La nova definició introduïda en aquesta tesi soluciona aquests problemes: s'aplica a varietats quasiprojectives, admet la definició d'un producte d'intersecció i imatges inverses i coincideix amb la definició de Goncharov per a varietats projectives.

Cal fer notar, però, que aquesta definició no és la definitiva. Els grups de Chow superiors són una bona definició d'homologia motívica per a varietats definides sobre un cos i, per tant, la definició donada en aquesta tesi s'aplica únicament a varietats definides sobre un cos. La definició més general per a varietats definides sobre un anell aritmètic haurà d'esperar que l'homologia motívica estigui més desenvolupada.

Finalment, el tercer resultat de la tesi és la introducció d'operacions d'Adams en teoria K aritmètica superior. Atès que els grups de teoria K aritmètica superior es defineixen com la fibra homotòpica del regulador de Beilinson, per tal d'aconseguir aquest objectiu, ha estat necessari construir un morfisme explícit de complexos de cadenes que representa les operacions d'Adams i que és compatible amb una representació explícita del regulador de Beilinson.

La construcció d'aquest morfisme explícit no és trivial i ha involucrat la resolució de molts problemes de naturalesa combinatòrica. Per demostrar que el morfisme construït representa les operacions d'Adams s'ha utilitzat el teorema d'unicitat de classes característiques.

Els resultats d'aquesta tesi són un pas important en el desenvolupament de la teoria d'intersecció aritmètica superior. Han donat lloc a quatre publicacions en revistes internacionals i diverses conferències en congressos internacionals.

José Ignacio Burgos
ICMAT CSIC-UAM-UCM-UC3

• Joan Bosa Puigredon, «Complecions de semigrups. Aplicacions al semigrup de Cuntz».
Premi Évariste Galois 2010

La classificació és un tema central en les matemàtiques. Ha donat lloc a alguns dels desenvolupaments més interessants del segle XX. Una de les àrees on ha tingut més impacte és la d'àlgebres d'operadors. Molt probablement els primers resultats van ser deguts als pares de la teoria, F. Murray i J. von Neumann, que ja als anys trenta van provar que una àlgebra de von Neumann —una subàlgebra autoadjunta i dèbilment tancada dels operadors lineals i fitats en un espai de Hilbert— es podia descompondre en àtoms, que ells van anomenar *factors*, i van donar una classificació d'aquests factors en tipus. Als anys setanta, A. Connes i U. Haagerup van classificar completament certs factors injectius, la qual cosa va significar una medalla Fields per a Connes. Una altra medalla Fields fou aconseguida per a V. Jones, pel seu treball en subfactors, que al seu torn va donar lloc a noves i potents tècniques per a la classificació de nusos. En les dues darreres dècades, molta feina ha estat dedicada a l'anomenat *programa d'Elliott* per classificar les C^*-àlgebres per mitjà d'eines de teoria K.

George A. Elliott va classificar, el 1976, les C^*-àlgebres de dimensió local finita en termes del seu grup ordenat K_0, tot basant-se en treballs anteriors de J. Glimm i O. Bratteli. Aquest resultat i generalitzacions posteriors el van portar a conjecturar, pels volts de 1989, que les

C*-àlgebres separables, simples i nuclears podrien ser classificades essencialment pels grups K_0, K_1 i l'espai de traces. Aquesta conjectura va donar lloc en els anys següents a resultats molt importants. Per exemple, la demostració (per Elliott i Evans) que les àlgebres de rotació irracional es podien classificar d'aquesta manera, els resultats de Kirchberg-Phillips en la classificació de les C*-àlgebres purament infinites i simples i, més recentment, la classificació d'Elliott-Gong-Li de C*-àlgebres simples, aproximadament homogènies i de dimensió fitada.

Darrerament, el programa d'Elliott ha tingut un resorgiment important, essencialment a causa del descobriment per part de M. Rørdam (i posteriorment, en una direcció diferent, per part d'A. Toms) que la teoria K, en aquesta formulació més simple, no és suficient per classificar totes les C*-àlgebres simples, separables i nuclears. Essencialment, trobem dues vies d'actuació: o bé restringir la classe considerada, o bé ampliar l'invariant considerat. Ambdues vies se segueixen a fons actualment, i en aquest treball s'analitza un dels objectes proposats com a part d'un invariant ampliat, que analitzem breument a continuació.

A una C*-àlgebra A s'hi pot associar el semigrup de Cuntz $\mathrm{W}(A)$, introduït per J. Cuntz el 1978. Aquesta construcció és paral·lela a la del monoide de (classes d'equivalència de) projeccions de l'àlgebra (per exemple, classes d'isomorfisme de mòduls projectius finitament generats), però l'objecte resultant és molt diferent, ja que els elements considerats són els anomenats *elements positius de* A i hi intervé un procés de límit que el converteix en un objecte analític. La importància d'aquest objecte rau en el fet que la seva estructura ordenada és una obstrucció seriosa a la conjectura d'Elliott mencionada anteriorment, i també en el fet que recupera molta estructura de l'invariant d'Elliott.

El 2008, Coward, Elliott i Ivanescu van proposar una versió modificada del semigrup de Cuntz, anomenada $\mathrm{Cu}(A)$. Ho van fer usant classes d'equivalència adequades de mòduls de Hilbert comptablement generats per obtenir un objecte que, de fet, és isomorf al semigrup de Cuntz de l'estabilització de A. L'avantatge d'aquesta construcció és que construeixen una nova categoria, anomenada Cu, per a aquest semigrup, en la qual els objectes tenen algunes propietats addicionals de tipus topològic, i que essencialment es resumeixen en que són tancats per suprems de successions creixents.

En aquest treball es defineix un marc abstracte que conté conjuntament $\mathrm{W}(A)$ i $\mathrm{Cu}(A)$. Més concretament, construïm una categoria de monoides, PreCu, a la qual el semigrup de Cuntz clàssic hi pertany per una classe àmplia de C*-àlgebres. Aquesta categoria conté Cu com una subcategoria plena, i difereix d'aquesta en el fet que els seus objectes no tenen per què ser tancats per suprems de successions creixents. A continuació definim la compleció d'un objecte de PreCu en termes de propietats universals, i en demostrem l'existència fent la construcció explícita. Això dóna lloc a un functor de compleció de PreCu a Cu, adjunt per l'esquerra de la identitat, que permet descriure, en el cas particular del semigrup de Cuntz, $\mathrm{Cu}(A)$ com una compleció de $\mathrm{W}(A)$.

Aquest enfocament és útil per al càlcul concret de certs semigrups de Cuntz. Més concretament, els d'estabilitzacions d'àlgebres simples, separables i nuclears que absorbeixen l'anomenada *àlgebra de Jiang-Su* $\mathcal{Z}$, i d'aquesta manera es recuperen resultats provats el 2007 per N. Brown i A. Toms.

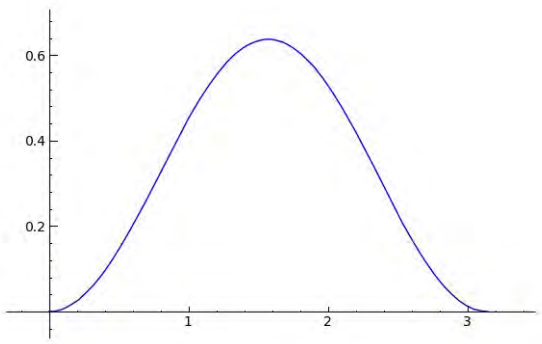
Francesc Perera
UAB

• David Arazo Marin, «No anul·lació de funcions L en valors crítics i resultats d'equidistribució en aritmètica». Accèssit del Premi Évariste Galois 2010

Un dels resultats més coneguts dels darrers anys en matemàtiques és la resolució del darrer teorema de Fermat. La generalització dels resultats utilitzats va permetre a Richard Taylor, deixeble d'Andrew Wiles, resoldre la conjectura de Sato-Tate l'any 2006, conjuntament amb altres matemàtics. El primer objectiu d'aquest treball de màster és explicar la motivació històrica, l'enunciat i, amb cert detall, la demostració de la conjectura de Sato-Tate.

En el primer capítol es demostren els teoremes clàssics de densitat de Dirichlet i de Chebotarev. Una versió feble i senzilla d'aquests dos teoremes afirma el següent: donats dos nombres enters coprimers a i m, existeixen infinits primers p congruents amb a mòdul m. El teorema de densitat de Dirichlet reformula i generalitza aquest resultat al context d'extensions abelianes de $\mathbb{Q}$, mentre que el teorema de Chebotarev el generalitza a extensions de Galois no necessàriament abelianes de cossos de nombres arbitraris.

En el capítol 2 del treball s'introdueix la teoria de Serre, que té la virtud de proporcionar les bases necessàries per demostrar resultats com els mencionats més amunt en contextos molt més generals. En particular, la teoria de Serre s'ajusta perfectament al context de la conjectura de Sato-Tate i suggereix d'aquesta manera un mètode per demostrar-la. Donat un grup compacte G i una successió $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ d'elements en el conjunt de les classes de conjugació de G indexada pels primers d'un cos de nombres, es defineix per a cada representació irreductible ρ no trivial de G una funció complexa $L(\rho, s)$. El resultat principal de la teoria de Serre permet relacionar l'equidistribució de $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ amb la no anul·lació de $L(\rho, s)$ en el semiplà complex $\Re(s) \geq 1$ per a tota representació irreductible no trivial de G.



Gràfica entre 0 i π de la distribució de Sato-Tate per a corbes el·líptiques.

Tot està preparat, doncs, per introduir, en el capítol 3, la conjectura de Sato-Tate i motivar-ne la demostració. Donada una corba el·líptica E/K sense multiplicació complexa, es consideren les traces $a_{\mathfrak{p}}$ dels automorfismes de Frobenius. Utilitzant el teorema de Hasse, podem normalitzar les traces $a_{\mathfrak{p}}$ de manera que prenguin valors a l'interval $[-1, 1]$ i considerar-ne els arc cosinus $\theta_{\mathfrak{p}} \in [0, \pi]$. La conjectura de Sato-Tate prediu que la probabilitat que un element $\theta_{\mathfrak{p}}$ compleixi $a \leq \theta_{\mathfrak{p}} \leq b$ és $\frac{2}{\pi}\int_a^b \sin^2(x)dx$.

Per demostrar aquesta conjectura, l'estratègia de Taylor consisteix a aplicar la teoria de Serre descrita al capítol anterior, prenent $G = \mathrm{SU}(2)$, el grup especial unitari. D'aquesta manera, i tenint en compte la discussió anterior, la conjectura de Sato-Tate pot interpretar-se com un resultat d'equidistribució dels valors $\theta_{\mathfrak{p}}$ en les classes conjugació de $\mathrm{SU}(2)$, que al seu torn és equivalent a comprovar la no-anul·lació de les funcions $L(Symm^n \rho_{E,\ell}, s)$ en $\Re(s) \geq 1 + n/2$. Aquí $\rho_{E,\ell}$ és la representació associada al mòdul de Tate ℓ-àdic de E i $Symm^n \rho_{E,\ell}$ és la seva potència simètrica n-èsima.

Per demostrar aquest resultat s'introdueixen les anomenades *representacions automorfes cuspidals*, que són una generalització de les formes modulars clàssiques, àmpliament divulgades atès al seu paper clau en la demostració de Wiles del darrer teorema de Fermat. Taylor demostra que si E està definida sobre un cos totalment real i té reducció multiplicativa en algun primer, aleshores $Symm^n \rho_{E,\ell}$ és potencialment automorfa cuspidal. Això directament implica la no-anul·lació desitjada.

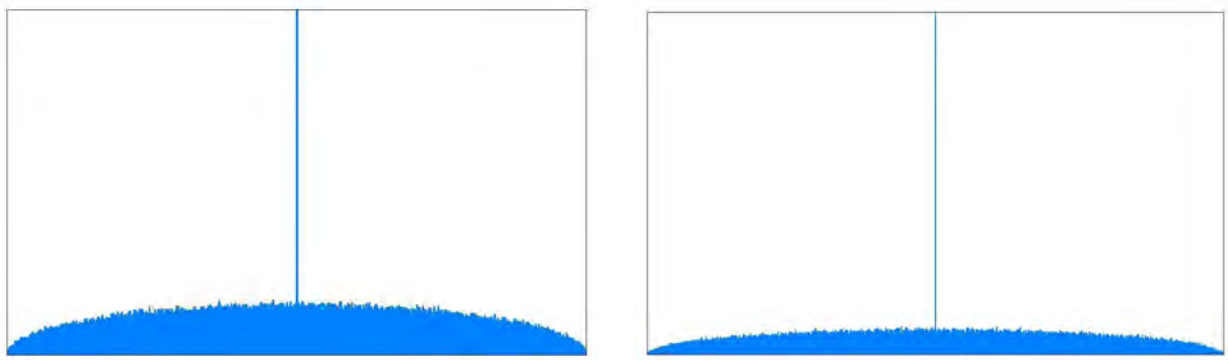
La demostració del teorema de Taylor utilitza els principals resultats i conceptes de la teoria de nombres actual. Per aquest motiu no es desenvolupen en el treball tots els detalls tècnics sobre la demostració, però si que es presenten tots els conceptes i resultats, entre els quals cal destacar el resultat de canvi de base de Langlands, les famílies compatibles de representacions, les varietats de Calabi-Yau i essencialment el teorema d'aixecament de la modularitat de Taylor. Aquest darrer teorema va ser demostrat l'any 2006 i és la dificultat principal de la demostració de la conjectura de Sato-Tate.

El següent objectiu del treball, escomès al capítol 4, és la generalització, utilitzant la teoria de Serre, de la conjectura de Sato-Tate a corbes C de gènere $g \geq 2$. Aquesta generalització relaciona l'equidistribució de les arrels dels morfismes de Frobenius amb la mesura de Haar d'un subgrup compacte H de $USp(2g)$, les matrius de dimensió $2g$ a coeficients complexos simplèctiques i unitàries. Diem que H és el *grup de distribució de C*.

El principal resultat conegut en aquesta direcció és degut a K. S. Kedlaya i A. V. Sut-

herland l'any 2008, els quals, mitjançant un estudi numèric, van conjecturar una classificació dels grups de distribució possibles de corbes de gènere 2 definides sobre $\mathbb{Q}$. En el capítol 5 es descriuen les bases d'aquest estudi numèric. Segons aquest estudi s'obtenen 23 subgrups compactes de $USp(4)$ que si sorgeixen com a possibles grups de distribució, i es conjectura que tota corba de gènere 2 té com a grup de distribució un d'aquests 23. A més, per a les corbes amb jacobiana simple es proposa un grup de distribució concret a partir de l'estructura de l'anell d'endomorfismes definits a la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$.

L'últim propòsit del treball revisa aquesta classificació. Es considera la corba $D : y^2 = 9960x^6 + 50400x^5 - 147420x^4 + 352800x^3 - 692370x^2 + 617400x - 190365$ estudiada per L. V. Dieulefait i V. Rotger. Aquesta corba té jacobiana simple, amb multiplicació quaterniònica. La principal diferència amb qualsevol de les corbes amb multiplicació quaterniònica utilitzades en l'estudi numèric realitzat per Kedlaya i Sutherland és que el mínim cos on estan definits tots els endomorfismes de D té grau 4 sobre $\mathbb{Q}$. Calculant el grup de distribució de D es comprova que no és l'esperat segons la classificació proposada. Aquest resultat permet concloure que els grups de distribució de les corbes no depenen únicament de l'anell d'endomorfismes definits a la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, sinó que cal considerar l'arbre d'àlgebres d'endomorfismes en considerar totes les subextensions de $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Així doncs, una de les conclusions del treball és que les conjectures de Kedlaya i Sutherland han de ser corregides. Aprofundir en aquesta direcció és l'objectiu de la recerca de David Arazo.



Comparació entre les distribucions de la corba $y^2 = x^5 + x^3 + x$ amb multiplicació quaterniònica utilitzada per Kedlaya i Sutherland, i de la corba D.

Víctor Rotger
UPC

• Víctor González Alonso, «Gèrmens polars i invariants de singularitats».

Accèssit del Premi Évariste Galois 2010

En aquest treball l'autor aborda un problema que ha fet ballar el cap a especialistes en singularitats durant unes quantes dècades. Per a entendre el plantejament d'aquest problema, introduïm a continuació, pas a pas, els diversos conceptes que hi intervenen.

Es tracta d'un problema local de singularitats de corbes planes. En ser un problema local, es considera fixat un punt O llis d'una superfície complexa S i ens interessem pels gèrmens en O de funcions holomorfes en un entorn de O, que descriuen un anell $\mathcal{O}$, anomenat *anell local de S en O*. Prenent coordenades locals x, y en O, es pot representar cada funció holomorfa en un entorn de O per una sèrie convergent en les variables x, y, i això dóna un isomorfisme entre $\mathcal{O}$ i l'anell de sèries de potències convergents en x, y, $\mathbb{C}\{x, y\}$. Per tant, la superfície S és en O localment isomorfa a un pla, de fet, a $\mathbb{C}^2$ en l'origen, i és per aquest motiu que parlem de corbes planes, o de gèrmens de corbes planes, en referir-nos a les corbes ξ representades per

una equació de funció holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. És interessant remarcar que la mateixa corba ξ pot ser representada per una altra equació $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$, si i només si el quocient $\frac{f}{g}$ és un element invertible de l'anell $\mathbb{C}\{x, y\}$. Ara definim l'ordre d'anul·lació de ξ en O, $o(f)$, com el mínim ordre del desenvolupament de Taylor de f en O, que és independent de les coordenades x, y i de l'equació $f = 0$ triades. Observem que la corba ξ passa per O, si i només si $o(f) \geq 1$; altrament es diu que ξ és el germen de corba buit. Es diu que la corba ξ passant per O és singular si $o(f)$ és estrictament més gran que 1, altrament es diu que la corba és llisa.

En el context en què ens trobem, les úniques corbes que presenten interès són les corbes singulars, que poden ser molt complicades. Una primera mesura de l'ordre d'aquesta complicació podria ser $o(f)$, i el primer terme del desenvolupament de Taylor de f en O, els factors del qual ens donen les rectes tangents a la corba en O. Una altra mesura de la complicació de la singularitat d'una corba és el que s'anomena el seu *polígon de Newton*, que codifica els termes inicials del desenvolupament de Taylor de f en O segons totes les possibles ponderacions de les variables x, y: per exemple, amb la ponderació (m, n) el monomi $x^i y^j$ té grau ponderat $mi + nj$. Totes aquestes propostes es queden curtes davant la complicació que pot arribar a presentar la singularitat d'una corba, i tan sols ens aporten informació acurada quan les considerem no només en l'equació f, sinó també en totes les equacions de les transformades de la corba per una operació anomenada *explosió*, de la qual parlaré tot seguit.

Entre totes les singularitats, les de corbes planes són les més ben estudiades, i hi ha una teoria molt ben establerta per a analitzar-les i classificar-les, deguda principalment a Noether, Zariski i Enriques. En el seu treball, Víctor González segueix l'enfocament d'Enriques, desenvolupat i sintetitzat per Casas en el llibre *Singularities of plane curves* (2000), que permet entendre les singularitats de corba plana mitjançant els punts infinitament propers pels quals passa. Els punts infinitament propers no són punts pròpiament de S, sinó de superfícies obtingudes a partir de S per operacions d'explosió, conegudes en anglès com *blow-up*. Per a fer-nos-en una idea, una explosió de S en el punt O és com una operació *de cirurgia* que substitueix el punt O per una recta que materialitza les direccions tangents en O, i deixa la resta igual. Així, una corba ξ en S que passa per O i hi té e tangents diferents es correspon a la superfície explotada amb una corba que té e punts nous en comptes de O, és a dir, la transformada de ξ, que és l'adherència de la corba corresponent a $\xi - O$ en la superfície explotada, té e punts nous. Els punts de S, O inclòs, s'anomenen *punts propis* (perquè són pròpiament de la superfície original S) per a diferenciar-los dels nous punts que apareixen en les operacions d'explosió, que s'anomenen *punts infinitament propers*.

En la teoria de singularitats es demostra que només hi ha un nombre finit d'aquests punts infinitament propers pels quals passa ξ i que són singulars de la transformada de ξ; diem que formen el clúster de punts singulars de la corba ξ. Els punts del clúster de punts singulars d'una corba i certes relacions entre si es poden codificar mitjançant un diagrama d'arbre on l'arrel representa el punt original O, hi ha un vèrtex per cada punt del clúster i les arestes (i la forma en què són traçades) representen aquestes relacions entre els punts que hem mencionat. Aquest diagrama d'arbre s'anomena *diagrama d'Enriques* i té una rellevància especial dintre la teoria de singularitats, perquè classifica topològicament les corbes planes: si es consideren els gèrmens de corba plana com a gèrmens d'espais topològics de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, aleshores dos gèrmens són topològicament equivalents (és a dir, existeix un homeomorfisme que transforma un representant d'un dels gèrmens en un representant de l'altre), si i només si són equisingulars, on equisingular vol dir que tenen el mateix diagrama d'Enriques.

Pel que acabem de dir, queda clar que les classes d'equivalència topològica de corbes planes estan molt ben enteses, ja que disposem d'un objecte combinatori, el propi, diagrama d'Enriques, que les caracteritza. Però en el context en què estem (el de corbes descrites per funcions holomorfes o analítiques), el més natural és considerar la classificació més fina de les corbes planes mòdul isomorfisme analític. Aquesta classificació és molt complicada i encara no està entesa actualment (és un problema obert en la teoria de singularitats). Un resultat en aquest sentit, degut a Mather i Yau, ens diu que l'ideal jacobià $J(\xi) = (f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$; de fet, la

$\mathbb{C}$-àlgebra $\frac{\mathcal{O}}{J(\xi)}$, determina la classe d'isomorfisme analític de ξ. Els elements de l'ideal $J(\xi)$ són de la forma $h = u_1 f + u_2 \frac{\partial f}{\partial x} + u_3 \frac{\partial f}{\partial y}$, per a $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}\{x, y\}$, i, si o bé u_2 o bé u_3 és invertible, es diu que $h = 0$ defineix una corba polar de la corba ξ.

És un resultat de teoria de singularitats que «quasi totes» les polars (concretament, un obert de Zariski de l'ideal jacobià) comparteixen un conjunt finit de punts infinitament propers, que anomenem *clúster de punts base de les corbes polars*, i que inclou el clúster de punts singulars de cadascuna d'aquestes polars; les polars amb aquesta propietat les anomenem *polars genèriques*. El resultat de Mather i Yau deixa palès per què els gèrmens polars són una de les principals eines per a analitzar singularitats de corbes planes, i el motiu és que porten molta informació sobre la classe analítica de la singularitat. Hi ha hagut molts esforços en la literatura (per exemple en treballs de Le, Teissier, Merle i Kuo-Lu) per intentar desxifrar quina d'aquesta informació és purament topològica.

Un dels principals problemes en aquesta direcció consisteix a recuperar el clúster de punts singulars d'una corba, determinant així la seva classe topològica (o classe d'equisingularitat), a partir d'invariants associats als gèrmens polars. La major part dels intents dels darrers trenta anys, duts a terme per escoles expertes en singularitats (com ara la francesa), han utilitzat la informació proporcionada per una polar genèrica (treballs de Teissier i Merle), però aquest no ha resultat ser un invariant apropiat i el problema ha romàs obert. La primera (i única) resposta positiva en aquesta direcció va ser donada per Casas l'any 2000, que va demostrar que el clúster de punts base de les corbes polars determina unívocament els punts singulars de la corba. Resulta, doncs, que no n'hi ha prou de considerar el clúster de punts singulars d'una polar genèrica, ja que també és necessari tenir en compte alguns punts no singulars addicionals: els compartits per totes les polars genèriques. Aquest resultat es pot interpretar com una versió local d'un conegut fet de geometria projectiva: els punts singulars (propis) d'una corba algebraica plana són exactament els punts base (propis) de les seves corbes polars.

La prova donada per Casas consta de dos passos: el primer és recuperar els invariants polars (certs invariants topològics de la singularitat que són calculables a partir dels gèrmens polars), i el segon és un procediment que segueix curosament els polígons de Newton de les transformades iterades d'una polar genèrica per operacions d'explosió. L'inconvenient més gran d'aquesta demostració és que no ajuda a aclarir la connexió entre el clúster de punts singulars de la corba i el de les seves polars genèriques.

El treball de Víctor González té l'objectiu de determinar explícitament el clúster de punts singulars de la corba directament a partir del clúster de punts base de les seves polars genèriques, i ho aconsegueix mitjançant un algorisme que dóna, en particular, una nova demostració del resultat de Casas, molt clara i netament diferent. A més, l'avantatge d'aquest algorisme és que es pot aplicar directament al diagrama d'Enriques del clúster de punts base de les polars genèriques i determina el diagrama d'Enriques del clúster de punts singulars de la corba. Així, amb menys informació, com és només la classe d'equisingularitat del clúster de punts base de les polars genèriques, n'hi ha prou per a determinar la classe topològica de la corba. Aquesta demostració consta també d'un primer pas, on es recuperen els invariants polars de la mateixa manera que en la prova prèvia de Casas; la segona part de la prova és la que aporta la novetat i s'aconsegueix el resultat després de reinterpretar el problema en termes de la teoria de morfismes analítics planars (desenvolupada recentment pel mateix Casas) i d'un ús acurat i enginyós d'aquestes noves tècniques. D'aquesta manera, s'evita també el càlcul feixuc del polígon de Newton de cada transformada de la corba per les diferents explosions.

Maria Alberich-Carramiñana
UPC